

## Correction Devoir maison n°6

**Exercice 1 - ECRICOME 2013 ECT**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3 \ln(x)}{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 2x^3 - 6 \ln(x) + 3$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

**I- Étude du signe de  $g$** 

1. La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x}$$

2. En développant la partie de droite, on obtient ;

$$\begin{aligned} (x-1)(ax^2 + bx + c) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

Ainsi  $a = 1$ ,  $b - a = 0$  donc  $b = 1$  et  $c = 1$ . Donc

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1$$

3. On résout pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\iff 6x^2 - \frac{6}{x} = 0 \\ &\iff \frac{6(x^3 - 1)}{x} = 0 \\ &\iff x^3 - 1 = 0 \\ &\iff (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \end{aligned}$$

On résout alors  $x^2 + x + 1 = 0$ . Le discriminant de cette équation est  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ . Ainsi cette équation n'a aucune solution.

$$g'(x) = 0 \iff x - 1 = 0$$

Ainsi l'équation  $g'(x) = 0$  n'admet qu'une unique solution  $x = 1$

4. On a  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$  donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} g(x) = +\infty$$

On a

$$g(x) = 2x^3 \left( 1 - \frac{3 \ln(x)}{x^3} + \frac{3}{2x^3} \right)$$

et également

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{3 \ln(x)}{x^3} + \frac{3}{2x^3} \right) = 1$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x)}{x^3} = 0$  par croissance comparée On conclut

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.}$$

5. On construit le tableau de variation  $g$  :

$x$	0	1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		-	0
Variations de $g$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		5	$+\infty$

6. Le minimum de la fonction  $g$  est 5 obtenu pour  $x = 1$ . Ainsi

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+^*.$$

## II- Représentation graphique de $f$

- La fonction  $x \rightarrow 2x$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $x \rightarrow x^2$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et ne s'annule pas sur cet intervalle. La fonction  $x \rightarrow 3 \ln(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$  en tant que somme et quotient de fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  en tant que somme et quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{3x^2 - 6x \ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{2x^3}{x^3} + \frac{3 - 6 \ln(x)}{x^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6 \ln(x) + 3}{x^3} = \boxed{\frac{g(x)}{x^3}} \end{aligned}$$

3. D'après la question 2, on a

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = -\infty}$$

D'après les croissances comparées, on sait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x)}{x^2} = 0$$

On en déduit

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.}$$

4. On dresse le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$x$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	
Variations de $g$	$-\infty$	$+\infty$

5. On a

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{3 \ln(x)}{x^3}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$  par croissance comparée. Donc

$$\boxed{a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2}$$

et de même

$$f(x) - 2x = \frac{3 \ln(x)}{x^2}$$

$$\boxed{b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = 0.}$$

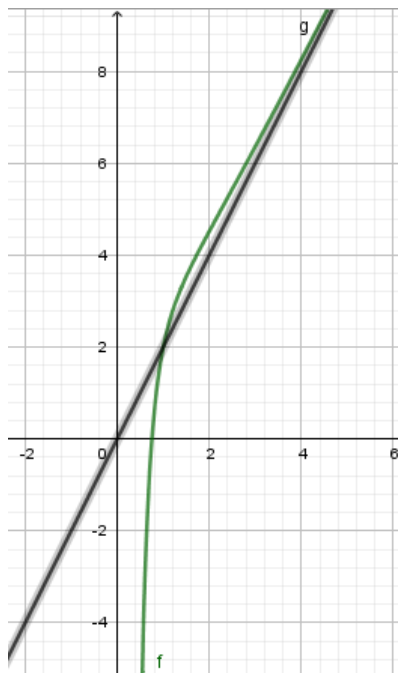
6. On note  $(D)$  la droite d'équation  $y = 2x$ . On cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f(x) - 2x \geq 0 &\iff \frac{3 \ln(x)}{x^2} \geq 0 \\ &\iff \ln(x) \geq 0 \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

Ainsi,

la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de  $(D)$  sur  $]1; +\infty[$  et en dessous sur  $]0, 1[$ .

7. On sur un même dessin la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $(D)$ .



### III- Étude d'une équation.

Soit  $n \geq 1$  un entier naturel non nul, on considère l'équation

$$(E_n) : f(x) = 2n$$

1. Soit  $n \geq 1$  un entier fixé. On a démontré

— La fonction  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

— La fonction  $f$  est strictement croissante.

—  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . (On notera plus tard  $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ .)

Donc, d'après le théorème de la bijection, on sait que

l'équation  $(E_n)$  admet une unique solution.

2. On calcule  $f(x_n) = 2n$  par définition,  $f(1) = 2$  et  $f(n) = 2n + \frac{3 \ln(n)}{n^2}$ . Or  $\frac{3 \ln(n)}{n^2} > 0$  donc

$f(1) \leq f(x_n) \leq f(n)$  On reprend le raisonnement précédent,

— La fonction  $f$  est continue sur  $[1; n]$ .

—  $f(1) \leq 2n \leq f(n)$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe une solution à  $(E_n)$  (qui est nécessairement la même qu'à l'exercice 1) vérifiant

$$\forall n \geq 1, \quad 1 \leq x_n \leq n.$$

3. On part de

$$\begin{aligned} f(x_n) = 2n &\iff 2x_n + \frac{3 \ln(x_n)}{x_n^2} = 2n \\ &\iff \frac{x_n}{n} + \frac{3 \ln(x_n)}{2n(x_n)^2} = 1 \\ &\iff \boxed{1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3 \ln(x_n)}{2n(x_n)^2}} \end{aligned}$$

4. On part de l'inégalité de la question 2

$$1 \leq x_n \leq n \iff 0 \leq \ln(x_n) \leq \ln(n)$$

On a également

$$\frac{1}{x_n} \leq 1 \implies 0 \leq \frac{1}{x_n^2} \leq 1$$

En combinant ces inégalités, on a

$$0 \leq \frac{\ln(x_n)}{(x_n)^2} \leq \ln(n) \iff \boxed{0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}}$$

5. On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$  par croissance comparée. Donc d'après le théorème des gendarmes et l'inégalité précédente on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} = 0$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{x_n}{n} = 0$  et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1.}$$

## Exercice 2 - Exercices de cours sur les variables aléatoires.

### Exercice 12A (cours)

On considère une variable aléatoire  $X$  prenant les valeurs 0,1,2 ou 3. On donne

$$P(X = 0) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Comme les événements  $(X = 2)$  et  $(X = 3)$  sont équiprobables, On a  $P(X = 2) = P(X = 3)$ . De plus, comme  $(X = i)_{i \in \{0,3\}}$  est un système complet d'évènements alors

$$\begin{aligned} P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) &= 1 \\ \iff \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 2P(X = 2) &= 1 \\ \iff 2P(X = 2) &= 1 - \frac{4}{6} \\ \iff 2P(X = 2) &= \frac{1}{3} \\ \iff \boxed{P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

2. La loi de  $X$ , c'est tout simplement les probabilités calculées à la question 1. On peut le récapituler dans un tableau :

$k$	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On utilise la formule pour calculer l'espérance :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=0}^3 kP(X = k) \\
 &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) \\
 &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \\
 &= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Pour déterminer la variance, on commence par calculer :

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k=0}^3 k^2P(X = k) \\
 &= 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) \\
 &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} \\
 &= \frac{16}{6} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

On n'oublie pas de donner la variance à l'aide de la formule de Koëning-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{8}{9}$$

### Exercice 12B (Application)

On tire successivement 2 dés à 6 faces. On note  $X$  la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

1. L'écart maximum sera obtenue en tirant obtenant 6 sur un dé et 1 sur l'autre. L'écart minimum est 0 si l'on tire deux fois le même nombre. Ainsi,

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$$

On note pour  $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ , l'évènement  $A_k$  : "Obtenir le n°  $k$  au premier tirage" et  $B_k$  : "Obtenir le n°  $k$  au second tirage". Les évènements  $A_k, B_j$  sont indépendants pour tout  $(j, k) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ .

$$\begin{aligned}
 P(X = 5) &= P((A_6 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_6)) \\
 &= P(A_6 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_6) \\
 &= P(A_6)P(B_1) + P(A_1)P(B_6) \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

On peut également résoudre ce problème à l'aide du dénombrement.  $\Omega$  est l'ensemble des 2-liste de l'ensemble  $E = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ . Ainsi,  $\text{card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36$ . Or

$$(X = 4) = \{(1, 5); (2, 6); (6, 2); (5, 1)\}$$

Ainsi  $\text{card}(X = 4) = 4$  et donc

$$P(X = 4) = \frac{\text{card}(X = 4)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

De la même façon,

$$(X = 3) = \{(1, 4); (2, 5); (3, 6); (6, 3); (5, 2); (4, 1)\}$$

Ainsi  $\text{card}(X = 3) = 6$  et donc

$$P(X = 3) = \frac{\text{card}(X = 3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

,

$$(X = 2) = \{(1, 3); (2, 4); (3, 5); (4, 6); (6, 4); (5, 3); (4, 2); (3, 1)\}$$

Ainsi  $\text{card}(X = 2) = 8$  et donc

$$P(X = 2) = \frac{\text{card}(X = 2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

De même,

$$(X = 1) = \{(1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 6); (6, 5); (5, 4); (4, 3); (3, 2); (2, 1)\}$$

Ainsi  $\text{card}(X = 1) = 10$  et donc

$$P(X = 1) = \frac{\text{card}(X = 1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

et

$$(X = 0) = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$$

Ainsi  $\text{card}(X = 0) = 6$  et donc

$$P(X = 0) = \frac{\text{card}(X = 0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

En conclusion (on vérifie que la somme fait bien 1),

$k$	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

2. On calcule alors l'espérance de la variable aléatoire  $X$ ,

$$E(X) = 0 + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4) + 5 \times P(X = 5)$$

$$= 0 + \frac{5}{18} + \frac{4}{9} + \frac{3}{6} + \frac{4}{9} + \frac{5}{18}$$

$$= \frac{5}{18} + \frac{8}{18} + \frac{9}{18} + \frac{8}{18} + \frac{5}{18}$$

$$= \frac{35}{18}$$

Afin de calculer la variance, on calcule  $E(X^2)$  avec le théorème de transfert

$$E(X^2) = 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) + 4^2 \times P(X = 4) + 5^2 \times P(X = 5)$$

$$= \frac{5}{18} + \frac{8}{9} + \frac{9}{6} + \frac{16}{9} + \frac{25}{18}$$

$$= \frac{5}{18} + \frac{16}{18} + \frac{27}{18} + \frac{32}{18} + \frac{25}{18}$$

$$= \frac{105}{18} = \frac{35}{6}$$

La variance est alors donnée par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 \\ &= \frac{1890 - 1225}{324} \\ &= \frac{665}{324} \end{aligned}$$

### Exercice 13A (cours)

On tire successivement et avec remise 6 cartes d'un paquet de 32 cartes. Dans les cas suivants, déterminer en le justifiant la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.

- On note  $X$  le nombre de valets obtenus. On peut obtenir entre 0 et 6 valets donc  $X(\Omega) = \llbracket 0, 6 \rrbracket$ . On compte le nombre de succès d'une répétition d'épreuves de Bernoulli (Obtenir un valet) ayant pour probabilité de succès  $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ . Donc  $X$  suit une loi binomiale de paramètre 6 et  $\frac{1}{8}$ .

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(6, 1/8) \text{ et } E(X) = \frac{3}{4}, V(X) = 6 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{32}$$

- On note  $X$  la variable aléatoire valant 1 si l'on a que des figures (rois, dames et valets) et 0 sinon. On a  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  donc  $X$  suit une loi de Bernoulli. On calcule  $P(X = 1) = \left(\frac{12}{32}\right)^6 = \left(\frac{3}{8}\right)^6$ . Ainsi

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(\frac{3}{8}\right)^6\right) \text{ et } E(X) = \left(\frac{3}{8}\right)^6, V(X) = \left(\frac{3}{8}\right)^6 \times \left(\frac{5}{8}\right)^6 = \left(\frac{15}{64}\right)^6$$

- On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirage.  $X(\Omega) = \{6\}$  donc  $X$  est une loi certaine. Ainsi

$$E(X) = 6 \text{ et } V(X) = 0.$$

- On note  $X$  la variable aléatoire valant 1 si un coeur tombe, 2 si un carreau tombe, 3 si un trèfle tombe et 4 si un pique tombe. On a  $X(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ . La probabilité est la même pour les évènements  $P(X = 1) = \frac{1}{4}, P(X = 2) = \frac{1}{4}, P(X = 3) = \frac{1}{4}$  et  $P(X = 4) = \frac{1}{4}$ . Il s'agit donc d'une loi uniforme :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(1, 4) \text{ et } E(X) = \frac{5}{2}, V(X) = \frac{16 - 1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

## Exercice 3 - Fonctions et Variables aléatoires

Terrassé par la perte de son fidèle ami Osorno emporté par la déesse Mapuche, et chassé du Villarica par les flammes noires de sa récente éruption, notre jeune condor Puyehue décida de réaliser un voyage initiatique à travers les Andes. Celui-ci l'amena à rencontrer une jeune condor nommée Chiloé. Et aujourd'hui il songe à sa descendance. Il faut savoir que le condor se reproduit de la manière suivante, il a 2 descendants avec probabilité  $p \in ]0, 1[$ , et 0 descendant avec probabilité  $1 - p$ . On note  $X_n$  le nombre de descendants de Puyehue à la  $n$ -ième génération. On s'intéresse à  $P(X_n = 0)$ , c'est à dire à la probabilité que la lignée de Puyehue soit éteinte à la  $n$ -ième génération.

- Soit  $f(x) = px^2 + 1 - p$  une fonction définie sur  $[0, 1]$  et soit  $(u_n)_n$  la suite définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

(a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (c'est une fonction polynôme) et

$$f'(x) = 2xp$$

On a de plus  $f(0) = 1 - p$  et  $f(1) = 1$ , on construit le tableau de variation suivant

$x$	0	1
Signe de $f'(x)$	0	+
Variations de $f$	$1 - p$	1

(b) On va montrer par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n \in [0, 1]\}$ .

- **Initialisation** : On a  $u_0 = 0 \in [0, 1]$  donc l'initialisation est vérifiée ( $\mathcal{P}_0$  est vraie).
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} & 0 \leq u_n \leq 1 \\ \implies & 0 \leq u_n^2 \leq 1 \\ \implies & 0 \leq pu_n^2 \leq p \\ \implies & 1 - p \leq pu_n^2 + 1 - p \leq 1 \\ \implies & 1 - p \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, 1]$ .

(c) On va montrer par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_{n+1} \geq u_n\}$ .

- **Initialisation** : On a  $u_0 = 0$  et  $u_1 = f(u_0) = 1 - p$  donc  $u_1 \geq u_0$  et l'initialisation est vérifiée ( $\mathcal{P}_0$  est vraie).
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors puisque la fonction  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} & u_n \leq u_{n+1} \\ \implies & f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \\ \implies & u_{n+1} \leq u_{n+2} \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition ( $\mathcal{P}_n$ ) est héréditaire.

- **Conclusion** : La suite  $(u_n)$  est croissante.

2. (a) On remarque que  $X_0 = 1$ . On cherche les supports de  $X_1$  et  $X_2$ .

$$X_1(\Omega) = \{0, 2\} \quad X_2(\Omega) = \{0, 2, 4\}$$

La loi de  $X_1$  est

$$P(X_1 = 0) = 1 - p \quad P(X_1 = 2) = p$$

Les événements  $(X_1 = 0)$  et  $(X_1 = 2)$  forment un système complet d'événement. On a alors la formule des probabilités totale :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 0) \\ &= (1 - p) \times 1 + p \times (1 - p)^2 \\ &= (1 - p)(1 + p - p^2) \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 2) \\ &= (1 - p) \times 0 + p \times 2 \times p \times (1 - p) \\ &= 2p^2(1 - p) \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} P(X_2 = 4) &= P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 4) + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = 4) \\ &= (1 - p) \times 0 + p \times p \times p \\ &= p^3 \end{aligned}$$

- (b)  $(X_1 = 0, X_1 = 2)$  est le système complet d'événements associé à  $X_1$  (cours).
- (c) La quantité  $P(X_n = 0)$  correspond à la probabilité que la  $n$ -ième génération de condor soit éteinte. Si on sait que Puyhene a eu deux descendants alors chacun d'eux à une probabilité  $P(X_n = 0)$  de ne pas avoir de  $n$ -ième descendant. La probabilité que ces deux enfants n'aient pas de  $n$ -ième descendant est donc

$$P(X_n = 0) \times P(X_n = 0) = P(X_n = 0)^2$$

En effet la descendance de chaque enfant de Puyhene sont indépendantes. Enfin, remarquons que le  $n$ -ième descendant des enfants de Puyhene est tout simplement le  $n + 1$ -ième descendant du condor. Donc, pour que Puyhene n'ait pas de  $n + 1$ -ième descendant, il faut que ses enfants n'aient pas de  $n$ -ième descendant. Ainsi,

$$P_{X_1=2}(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)^2.$$

- (d) D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_{n+1} = 0) + P(X_1 = 2)P_{X_1=2}(X_{n+1} = 0) \\ &= (1 - p) \times 1 + p \times P(X_n = 0)^2 \\ &= 1 - p + pP(X_n = 0)^2 \end{aligned}$$

## Problème - Évolution des intentions de vote

Dans une élection à venir, deux candidats  $A$  et  $B$  se présentent. Un groupe d'électeurs est composé de  $m$  individus, avec  $m \geq 2$ .

Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat  $A$  vaut  $a$  (il y en a donc  $m - a$  préférant le candidat  $B$ ). Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat  $A$  le soir du  $n$ -ième jour. Ainsi,  $X_n$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 0, m \rrbracket$ .

On remarque que  $X_0$  est une variable aléatoire certaine :  $P(X_0 = a) = 1$ .

### Partie I - Un cas particulier : $m = 4$

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

- Soit  $i$  et  $j$  deux entiers dans  $\llbracket 0, 4 \rrbracket$ . On note  $p_{i,j}$  la probabilité pour qu'il y ait exactement  $j$  personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour  $A$  un jour donné, sachant qu'il y en avait  $i$  la veille.

- (a) Si aucune personnes ne veut voter pour  $A$  les deux personnes se rencontrant veulent toutes les deux voter pour  $B$  et il n'y a pas de changement. D'où

$$p_{0,0} = P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 0) = 1.$$

De même si toutes les personnes veulent voter pour  $A$ , les deux qui se rencontrent veulent voter pour  $A$  et il n'y a aucun changement, et

$$p_{4,4} = P_{(X_k=4)}(X_{k+1} = 4) = 1.$$

- (b) Chaque jour une personne au maximum change d'avis donc si  $X_k = i$ , alors le lendemain

$$i - 1 \leq X_{k+1} \leq i + 1$$

et si  $|i - j| > 2$  cette condition n'est pas vérifiée donc

$$p_{i,j} = 0.$$

- (c) Si  $X_k = 1$ , on a :

Pour avoir  $X_{k+1} = 0$ , il faut que la première personne tirée vote pour  $B$ ; or il y en a 3 sur les 4 donc la probabilité est de  $\frac{3}{4}$ .

Il faut de plus que la deuxième personne tirée vote pour  $A$ ; or il y en a 1 sur les 3 restantes donc la probabilité est de  $\frac{1}{3}$ . On obtient donc

$$p_{1,0} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

Pour avoir  $X_{k+1} = 2$ , il faut que la première personne tirée vote pour  $A$ ; or il y en a 1 sur les 4 donc la probabilité est de  $\frac{1}{4}$ .

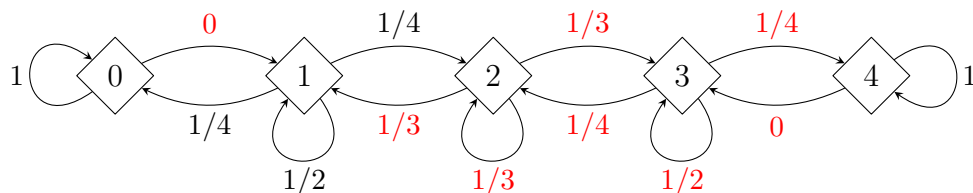
Il faut de plus que la deuxième personne tirée vote pour  $B$ ; or il y en a 3 sur les 3 restantes donc la probabilité est de 1. On obtient donc

$$p_{1,2} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}.$$

Enfin, comme  $(X_k = i)_{0 \leq i \leq 4}$  est un système complet d'évènements et  $p_{1,3} = p_{1,4} = 0$  par la question précédente, on a :

$$p_{1,1} = 1 - p_{1,0} - p_{1,2} - p_{1,3} - p_{1,4} = \frac{1}{2}.$$

- (d) Les justifications sont les mêmes que pour la question précédente



2. On définit la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$ , et pour tout entier naturel  $n$ , la matrice colonne  $U_n =$

$$\begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

Avec le système complet d'évènement  $(X_n = i)_{0 \leq i \leq 4}$ , la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{i=0}^4 P(X_n = i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 1) \\ &= 0 + p_{1,1}P(X_n = 1) + p_{2,1}P(X_n = 2) + 0 \\ &= \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}P(X_n = 2) \end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= \sum_{i=0}^4 P(X_n = i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 2) \\ &= 0 + p_{1,2}P(X_n = 1) + p_{2,2}P(X_n = 2) + p_{3,2}P(X_n = 3) + 0 \\ &= \frac{1}{4}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{4}P(X_n = 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 3) &= \sum_{i=0}^4 P(X_n = i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 3) \\ &= 0 + p_{2,3}P(X_n = 2) + p_{3,3}P(X_n = 3) + 0 \\ &= \frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3) \end{aligned}$$

Le produit  $MU_n$  donne alors :

$$MU_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}P(X_n = 2) \\ \frac{1}{4}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{4}P(X_n = 3) \\ \frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \\ P(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

On démontre l'égalité  $U_n = M^n U_0$  par récurrence sur  $n$ .

- **Initialisation** : On a  $M^0 = I_2$  et  $M^0 U_0 = U_0$  donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= M \times U_n \\ &= M \times M^n U_0 \\ &= M^{n+1} U_0 \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion** :  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, U_n = M^n U_0}$ .

## Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de  $m$  électeurs.

On note  $\pi_{n,k} = P(X_n = k)$ , la probabilité pour qu'il y ait exactement  $k$  électeurs envisageant de voter pour  $A$  à l'issue du  $n$ -ième jour.

1. Soit  $n$  un entier naturel.

- (a) Soit  $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ . Sachant que  $X_n = k$ , pour avoir  $X_{n+1} = k+1$  il faut que l'un des  $k$  électeurs voulant voter pour A soit tiré en premier (probabilité  $\frac{k}{m}$ ) puis que dans les  $m-1$  restants, on choisisse un des  $m-k$  voulant voter pour B (probabilité  $\frac{m-k}{m-1}$ ) donc

$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \frac{k}{m} \times \frac{m-k}{m-1} = \frac{k(m-k)}{m(m-1)};$$

Sachant que  $X_n = k$ , pour avoir  $X_{n+1} = k-1$  il faut que l'un des  $m-k$  électeurs voulant voter pour B soit tiré en premier (probabilité  $\frac{m-k}{m}$ ) puis que dans les  $m-1$  restants, on choisisse un des  $k$  voulant voter pour A (probabilité  $\frac{k}{m-1}$ ) donc

$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = \frac{m-k}{m} \times \frac{k}{m-1} = \frac{k(m-k)}{m(m-1)};$$

Enfin, on remarque que sachant  $X_n = k$ ,  $X_{n+1}$  est compris entre  $k-1$  et  $k+1$  donc

$$P_{X_n=k}(X_{n+1} = k-1) + P_{X_n=k}(X_{n+1} = k) + P_{X_n=k}(X_{n+1} = k+1) = 1$$

donc on obtient

$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = 1 - \frac{2k(m-k)}{m(m-1)}.$$

- (b) On calcule  $\pi_{n+1,k} = P(X_{n+1} = k)$  pour  $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ . Avec le système complet d'évènement  $(X_n = j)_{j \in \llbracket 0, m \rrbracket}$  et en appliquant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} \pi_{n+1,k} &= \sum_{j=0}^n P(X_n = j) P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) \\ &= \sum_{j=0}^n \pi_{n,j} P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} \pi_{n,j} \times 0 + \sum_{j=k-1}^{k+1} \pi_{n,j} P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) + \sum_{j=k+2}^n \pi_{n,j} \times 0 \\ &= \sum_{j=k-1}^{k+1} \pi_{n,j} P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) \\ &= \pi_{n,k-1} \times \frac{(k-1)(m-k+1)}{m(m-1)} + \pi_{n,k} \times \left(1 - 2 \frac{k(m-k)}{m(m-1)}\right) + \pi_{n,k+1} \times \frac{(k+1)(m-k-1)}{m(m-1)} \\ &= \frac{(k-1)(m+1-k)\pi_{n,k-1} + [m(m-1) - 2k(m-k)]\pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}. \end{aligned}$$

2. (a) On montre par récurrence sur  $n$  les propositions

$$\mathcal{P}_n : \left\{ \forall k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, \pi_{n,k} \leq \left( \frac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \right)^n \right\}$$

- **Initialisation** :  $\pi_{0,k}$  est une probabilité donc

$$\pi_{0,k} \leq 1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \right)^0 = 1.$$

L'initialisation est bien vérifiée.

- **Hérédité** : On suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  fixé tel que  $\forall k \in \llbracket 1; m-1 \rrbracket$ ,  $\pi_{n,k} \leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$ . Alors pour tout  $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ , on a :

$$\pi_{n+1,k} \leq \frac{(k-1)(m+1-k) + [m(m-1) - 2k(m-k)] + (k+1)(m-1-k)}{m(m-1)} \times \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

On simplifie le numérateur du premier facteur qu'on note  $N$  :

$$\begin{aligned} N &= (k-1)(m+1-k) + [m(m-1) - 2k(m-k)] + (k+1)(m-1-k) \\ &= k(m-k) + k - m - 1 + k + m(m-1) - 2k(m-k) + k(m-k) - k + m - 1 - k \\ &= k(m-k)[1 - 2 + 1] + k(1 + 1 - 1 - 1) + m(-1 + 1) + m(m-1) - 2 \\ &= m(m-1) - 2 \end{aligned}$$

ce qui donne enfin :

$$\begin{aligned} \pi_{n+1,k} &\leq \frac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \times \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n \\ &\leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- **Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k \in \llbracket 1; m-1 \rrbracket$

$$\pi_{n,k} \leq \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n.$$

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $Z_n = X_{n+1} - X_n$ .

- (a) Comme une seule personne peut changer d'avis chaque jour, on a

$$|X_{n+1} - X_n| \leq 1$$

donc  $Z_n(\Omega) \subset \{-1; 0; 1\}$ .

De plus, avec  $X_n = 1$  qui peut donner avec une probabilité non nulle  $X_{n+1} = 0$ ,  $X_{n+1} = 1$  et  $X_{n+1} = 2$  on a bien  $\{-1; 0; 1\} \subset Z_n(\Omega)$  et enfin

$$Z_n(\Omega) = \{-1; 0; 1\}.$$

- (b) Avec le système complet d'évènement  $(X_n = k)_{k \in \llbracket 0; m \rrbracket}$  on a :

$$\begin{aligned} P(Z_n = 1) &= \sum_{k=0}^m P((Z_n = 1) \cap (X_n = k)) \\ &= \sum_{k=0}^m P((X_{n+1} - X_n = 1) \cap (X_n = k)) \\ &= \sum_{k=0}^m P((X_{n+1} = k+1) \cap (X_n = k)) \end{aligned}$$

Or  $X_{n+1} = m+1$  est impossible et  $(X_n = 0) \cap (X_{n+1} = 1)$  également car si  $X_n = 0$  alors  $X_{n+1} = 0$ . Enfin, en utilisant la formule des probabilités composées et avec le résultat du 1(a), on a

$$\begin{aligned} P(Z_n = 1) &= \sum_{k=1}^{m-1} P(X_n = k) P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \pi_{n,k} \times \frac{k(m-k)}{m(m-1)} \end{aligned}$$

(c) Un raisonnement identique donne (avec  $(X_{n+1} = ?1)$  et  $(X_n = m) \cap (X_{n+1} = m-1)$  impossibles) :

$$\begin{aligned} P(Z_n = -1) &= \sum_{k=1}^{m-1} P(X_n = k)P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \pi_{n,k} \times \frac{k(m-k)}{m(m-1)} \\ &= P(Z_n = 1) \end{aligned}$$

(d) On en déduit que

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= -1 \times P(Z_n = -1) + 0 \times P(Z_n = 0) + 1 \times P(Z_n = 1) \\ &= -P(Z_n = 1) + P(Z_n = 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(e) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par linéarité de l'espérance

$$E(Z_n) = E(X_{n+1}) - E(X_n) = 0$$

donc  $E(X_{n+1}) = E(X_n)$ . On montre alors par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$E(X_n) = E(X_0) = a$$

car  $X_0$  est une variable aléatoire certaine égale à  $a$ .

La suite  $(E(X_n))_n$  est bien constante égale à  $a$ .